

Einführung in die Beweislehre

100 elementare mathematische Beweise

Uwe Kraeft

2012

Berichte aus der Mathematik

Uwe Kraeft

Einführung in die Beweislehre

100 elementare mathematische Beweise

Shaker Verlag
Aachen 2012

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Copyright Shaker Verlag 2012

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-0898-2

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Vorwort

Der vorliegende Text zeigt ausgewählte Prinzipien der mathematischen Beweisführung auf der Grundlage des „Lehrgangs der Mathematik“ [KrI-VI] sowie der „Studies in Number Theory“ [Kr0-24] des Autors. Es ist kein Lehrbuch der mathematischen Zusammenhänge und setzt einige Vorkenntnisse voraus, die aber aus der zitierten Literatur leicht entnommen werden können. Es wurden vor allem einfache, grundlegende und unterschiedliche mathematische Beweisformen als Beispiele ausgewählt. Längere oder rein formale Beweise, die sich auf umfangreiche Definitionen stützen, deren Anforderungen nachzuweisen sind, wurden nicht übernommen.

Der Text stellt die Meinung des Autors nach dessen Kenntnissen dar. Eine kleine Auswahl von weiterführender deutschsprachiger Literatur wird am Ende des Buchs genannt. Der Inhalt wurde sorgfältig auf Fehler geprüft, die aber nicht gänzlich ausgeschlossen werden können. Eine Gewährleistung oder Garantie für die Richtigkeit des Textes kann nicht übernommen werden. Ich bin für entsprechende Hinweise oder Verbesserungsvorschläge dankbar.

Für die freundliche Unterstützung über einen Zeitraum von mehr als 10 Jahren und die immer rasche sowie sorgfältige Drucklegung möchte ich bei dieser Gelegenheit dem Shaker Verlag herzlich danken.

Leimen, im Januar 2012

Uwe Kraeft

<http://www.kannitverstan.net/>

Auswahl von Symbolen

$\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$	daraus folgt (in den angegebenen Richtungen)
\forall	für alle
\exists	es gibt
\in	ist Element von (ist enthalten in)
$A=\{a,b,c\}$	Beispiel einer Menge A mit Elementen a, b und c
\bar{A}	Komplementärmenge bezüglich M: M-A
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B, $A=B$ ist nicht ausgeschlossen
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B, $A=B$ ist explizit nicht ausgeschlossen
\cup, \cap	Vereinigung von Mengen, Durchschnitt von Mengen
$+, \oplus$	Addition
$\cdot, *, \otimes$	Multiplikation
\bullet, \times	Skalarprodukt, Vektorprodukt
$=$	(genau) gleich (nur in der Mathematik)
\cong	angenähert gleich (Grenzwert)
\approx, \sim	ungefähr gleich, von ähnlicher Größenordnung
\equiv	$a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow a \equiv b_c \Leftrightarrow (a-b)/c \in \mathbb{Z}$ für $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N}$
\mathbb{N}	natürliche Zahlen 1, 2, 3, ...
\mathbb{N}^0	natürliche Zahlen einschließlich der Null 0, 1, 2, 3, ...
P	Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ...
\mathbb{Z}	ganze Zahlen ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+	rationale Zahlen, positive rationale Zahlen
\mathbb{R}, \mathbb{C}	reelle Zahlen, komplexe Zahlen
i, j, m, n, \dots	meistens natürliche oder ganze Zahlen (oder $i^2 = -1$)
p_I	Primzahl I ($4n+1$)
p_{II}	Primzahl II ($4m-1$)
z, z^*, \bar{z}	komplexe Zahlen $z = a+bi$, $z^* = \bar{z} = a-bi$
\vec{v}	Vektor
\sum, \prod	Summe; Produkt
$[n]$	Restklasse
R	algebraische Struktur (hier Ring)
$(x,y)=d$	ggT von x und y ist d
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	Grenzwert „für x gegen Unendlich“
ggT	größter gemeinsamer Teiler
kgV	kleinstes gemeinsames Vielfaches

Andere spezielle Symbole werden im Text erklärt.

Inhalt

	Seite
1. Einführung - - - - -	- 1
2. Mathematische Beweismethoden - - - - -	- 9
3. Geometrie - - - - -	- 15
4. Trigonometrie - - - - -	- 21
5. Analytische Geometrie - - - - -	- 23
6. Mengenlehre - - - - -	- 27
7. Algebra - - - - -	- 29
8. Topologie - - - - -	- 35
9. Grenzwerte, Folgen und Reihen - - - - -	- 37
10. Infinitesimalrechnung - - - - -	- 41
11. Funktionentheorie - - - - -	- 43
12. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik - - - - -	- 45
13. Zahlentheorie - - - - -	- 47
13.1 Arithmetische Zahlentheorie - - - - -	- 49
13.2 Euklidische Folgen und Reihen - - - - -	- 54
13.3 Diophantische Gleichungen - - - - -	- 58
13.4 Algebraische Zahlentheorie - - - - -	- 61
13.5 Topologische Zahlentheorie und Kurven - - - - -	- 68
13.6 Analytische Zahlentheorie - - - - -	- 70
13.7 Statistische Zahlentheorie - - - - -	- 72
13.8 Primzahlen - - - - -	- 72
 Deutschsprachige mathematische Literatúrauswahl - - - - -	 - 77
 Veröffentlichungen des Autors - - - - -	 - 79
 Lehrgang der Mathematik - - - - -	 - 79
 Gesammelte Korrekturen - - - - -	 - 80
 Studies in Number Theory - - - - -	 - 83
 Collected corrections - - - - -	 - 85
 Index to the Studies in Number Theory - - - - -	 - 91