

Berichte aus der Statistik

B. Steffi Höse

**Statistische Genauigkeit bei der simultanen
Schätzung von Abhängigkeitsstrukturen und
Ausfallwahrscheinlichkeiten in Kreditportfolios**

Shaker Verlag
Aachen 2007

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Dresden, Techn. Univ., Diss., 2007

Copyright Shaker Verlag 2007

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8322-6291-4

ISSN 1619-0963

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Statistische Genauigkeit bei der simultanen Schätzung von Abhängigkeitsstrukturen und Ausfallwahrscheinlichkeiten in Kreditportfolios

von
B. Steffi Höse

Thematische Einordnung

Die Finanzinstitute sehen sich aufgrund der zunehmenden Globalisierung des Bankensektors weltweit wachsenden Kreditpositionen gegenüber. Mit der Vervielfachung von Umfang und Komplexität der Kreditportfolios ist auch die Notwendigkeit für den Einsatz quantitativer Kreditportfoliomodelle gestiegen, so dass sich der Bereich der Kreditrisikomodellierung in den letzten Jahren rasant entwickelt hat. Dabei dienen die Kreditportfoliomodelle den Finanzinstituten vor dem Hintergrund der Risikolage ihrer Kunden zur Quantifizierung ihrer eigenen Risiken.

Obwohl die bisher entwickelten Kreditportfoliomodelle in ihrem Ansatz sehr unterschiedlich sind, so verfolgen sie dennoch alle dasselbe Ziel, die Abhängigkeitsstruktur des Ausfall- oder sogar Bonitätsänderungsverhaltens der Kreditnehmer einer Periode abzubilden, um damit letztlich die Portfolioverlustverteilung dieser Periode zu modellieren. Auch hinsichtlich der Art der Parametrisierung unterscheiden sich die Kreditportfoliomodelle wenig. So zählen die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Kreditnehmer zusammen mit den Abhängigkeitsparametern, bei welchen es sich meist um Korrelationen handelt, zu den unbekannten und damit zu schätzenden Modellparametern. Da jede Schätzung mit Schätzfehlern behaftet ist, ist das Ziel dieser Arbeit nicht nur die simultane Punktschätzung der Modellparameter eines Kreditportfoliomodells, sondern vor allem die Untersuchung der Güteeigenschaften der Parameterschätzer und damit die Quantifizierung der Unsicherheiten in den geschätzten Parametern.

Zielsetzung und Abgrenzung

Die vorliegende Arbeit baut auf dem Zwei-Zustandsmodell auf. Die Bonität eines Kreditnehmers kann am Ende eines Risikohorizonts somit nur einen der zwei sich wechselseitig ausschließenden Zustände – Ausfall und Nicht-Ausfall – annehmen. Es werden keine Übergänge zu anderen Bonitäts- oder Ratingklassen betrachtet. Als Kreditportfoliomodell wird ausschließlich die Klasse der allgemeinen Bernoulli-Mischungsmodelle untersucht, zu der auch die mit dem Faktormodell kombinierten Schwellenwertmodelle gehören. Damit steht einer der bekanntesten Ansätze zur Modellierung

abhängigen Ausfallverhaltens von Kreditnehmern im Mittelpunkt dieser Arbeit.¹

Da die simultane Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten und Abhängigkeitsparametern aus nur einer Beobachtung, d. h. aus abhängigen Querschnittsdaten einer Periode, fehlschlägt, muss auf Daten des Längsschnitts zurückgegriffen werden, für die zum Zwecke einer konsistenten Schätzung stochastische Unabhängigkeit angenommen wird. Als Datenquelle für die Schätzung werden Zeitreihen der relativen Ausfallhäufigkeiten der Kreditnehmer in den Bonitätsklassen vorausgesetzt. Die Problematik der Korrelationsschätzung aus Unternehmenswert- oder Aktienkursrenditezeitreihen wird in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Ziel dieser Arbeit ist die Herleitung simultaner Punkt- und Intervallschätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeiten und Abhängigkeitsparameter im Rahmen des allgemeinen Bernoulli-Mischungsmodells mit mehreren Bonitätsklassen. Außerdem soll die Auswirkung der Schätzfehler auf das regulatorische Kapital quantifiziert werden. Um diese Ziele zu erreichen, erfolgt die Konstruktion der Maximum-Likelihood- und der Momentenschätzer sowie die Diskussion der Güteeigenschaften dieser Schätzer für endliche und unendliche Stichprobenumfänge. Basierend auf den asymptotischen Güteeigenschaften dieser Punktschätzer werden asymptotische Konfidenzintervalle für alle Modellparameter und asymptotische ellipsoide Konfidenzregionen für ganze Parametergruppen konstruiert. Diese Konfidenzintervalle bilden wiederum die Grundlage für die Konstruktion asymptotischer Konfidenzintervalle für die Bonitätskorrelation und das regulatorische Kapital, wie sie seit 2005 durch das Basel Committee on Banking Supervision definiert sind. Die entwickelte Methodik findet anschließend am Beispiel des Beta-Binomialmodells und des hier entwickelten multivariaten Probit-Normalmodells Anwendung.

Aufbau der Arbeit

Nach einer Einleitung wird in Kapitel 2 der zufällige Verlust eines Kreditportfolios definiert. Daran anschließend werden die wesentlichen Bestimmungsfaktoren der Portfolioverlustverteilung angegeben, zu denen auch die Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer und die Korrelation des Ausfallverhaltens der Kreditnehmer zählen. Die Definition der wichtigsten Maßzahlen einer jeden Verlustverteilung bildet die Grundlage für die Darstellung des prinzipiellen Einflusses korrelierten Ausfallverhaltens auf die Gestalt der Verlustverteilung.

In Kapitel 3 erfolgt die Diskussion des allgemeinen Bernoulli-Mischungsmodells als Ansatz zur Modellierung des gemeinsamen Ausfallverhaltens der Kreditnehmer eines Portfolios. Als Spezialfall dieser Modellklasse werden das Beta-Binomialmodell und das mit dem Faktormodell kombinierte Schwellenwertmodell vorgestellt. Darüber hinaus wird das Probit-Normalmodell als Portfoliomodell für mehrere Bonitätsklassen entwickelt.

Den Kern dieser Arbeit bildet Kapitel 4, welches die simultane Parameterschätzung des allgemeinen Bernoulli-Mischungsmodells behandelt. Es werden Schätzer der Modellparameter mit Hilfe der Maximum-Likelihood- und der Momentenmethode hergeleitet und deren Güteeigenschaften untersucht, welche die Grundlage für die Entwicklung asymptotischer Konfidenzintervalle der Parameter und asymptotischer ellipsoider Konfidenzregionen ganzer Parametergruppen sind. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die verschiedenen Punkt- und Intervallschätzer verglichen und Empfehlungen für deren Anwendung im Kreditrisiko ausgesprochen. Darüber hinaus erfolgt die Herleitung der Punkt- und Intervallschätzer für die Bonitätskorrelation und die Eigenkapitalanforderung, wie sie seit 2005 durch das Basel Committee on Banking Supervision definiert sind. Dabei wird

¹Das Bernoulli-Mischungsmodell bildet bspw. die Basis von CreditMetricsTM, eines der verbreitetsten Kreditportfoliomodelle.

auch eine asymptotische Konfidenzmenge für die Summe aller Risikoaktiva eines Kreditportfolios angegeben.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte auf das Beta-Binomialmodell angewendet. Dieses spezielle Bernoulli-Mischungsmodell unterstellt eine homogene Ausfallwahrscheinlichkeit für alle Kreditnehmer des Portfolios und eine einheitliche positive Ausfallkorrelation. Nach der Angabe der Punkt- und Intervallschätzer im Rahmen dieses Modells werden in einer 100000 Monte-Carlo-Replikationen umfassenden Simulationsstudie die Eigenschaften der Schätzer bei endlichen Stichprobenumfängen mit den asymptotischen Güteeigenschaften verglichen und die Auswirkungen der Schätzfehler auf das regulatorische und ökonomische Kapital diskutiert.

Schließlich werden in Kapitel 6 für die Parameterschätzung des multivariaten Probit-Normalmodells mit mehreren Bonitätsklassen neben der Momentenmethode drei verschiedene, auf der Maximum-Likelihood-Methode beruhende Ansätze diskutiert, die approximative Maximum-Likelihood-Methode, die *method of inference functions for margins* und die hier entwickelte Transformationsmethode zur Punkt- und Intervallschätzung. Ein Vergleich der verschiedenen Schätzansätze erfolgt mit Hilfe einer umfangreichen Simulationsstudie, in der ein Probit-Normalmodell mit 7 Bonitätsklassen geschätzt wird, dessen Ausfallwahrscheinlichkeiten auf dem Ratingsystem des Deutschen Sparkassen- und Giroverbands beruhen. Eine Zusammenfassung beschließt die Arbeit.